Lo spostamento di massa

Antonino Maria Ferro

Indice

0.1 Introduzione

Prendiamo in considerazione l'idea di ottenere energia dal frenamento di una massa. Ovviamente la massa è un invariante ossia è la stessa in tutti i sistemi di riferimento; ma l'inerzia no! Questa varia a seconda dello stato di moto del sistema. Éproprio quest'inerzia la sede, il serbatoio di energia da cui si vuole attingere. Una ipotesi fondamentale è che la massa non esista oggettivamente ma che sia solo un fenomeno di movimento localizzato e invariante; una sorta d vortice dello spaziotempo. A sufragare quest'ipotesi è proprio la non additività della massa in campo relativistico. La sua invarianza è dovuta alla sua dimensione scalare perciò di coppia di forze che, per qualche motivo, sia intrinseca, fuori dallo spaziotempo (come lo spin quantistico). Di seguito facciamo un'analisi delle formule per approfondire quest'idea. Il risultato è ancora da venire ma siamo sulla strada giusta.

0.2 Definizioni

Nella meccanica relativistica si introduce il concetto di energia a riposo $E_o = mc^2$ dove m è la massa del sistema (particella elementare) e c

è la velocità della luce nel vuoto (ovviamente la luce stà sempre nel vuoto). Nella dinamica relativista vale il *teorema dell'energia cinetica*[1] ma con una modifica dei concetti di forza e lavoro classici. Inoltre nei sistemi inerziali valgono le seguenti equazioni per l'energia totale di una particella libera e per il momento lineare (o quantità di moto)

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + K \qquad \mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2} = \gamma m\mathbf{v} \qquad K = (\gamma - 1)mc^2$$

con $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, il fattore relativistico di Lorentz, $\beta = v/c$. Eliminando dalle equazioni la velocità del sistema si ottiene

$$m^2c^4 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2$$

È una conseguenza notevole della teoria che l'energia di una particella a riposo non è nulla, in altre parole la massa è vista come un particolare tipo di energia.

Se introduciamo come unità di misura il *secondo luce* al posto del metro, la velocità della luce, ovviamente è $1\,\frac{s\text{-}luce}{s}$, otteniamo la quantità

$$m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$$

che, essendo uno scalare invariante, possiamo vederla come risultato di un prodotto scalare di un quadrivettore energia - impulso.

Prendiamo in considerazione n particelle non interagenti le une con le altre ossia libere. L'energia totale ed il momento lineare totale sono

$$E = \sum_1^n E_i \qquad \mathbf{p} = \sum_1^n \mathbf{p}_i$$

e quindi la massa totale del sistema è

$$M^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2} \neq \sum_1^n \left[\frac{E_i^2}{c^4} - \frac{p_i^2}{c^2}\right] = \sum_1^n m_i^2$$

la quale non corrisponde alla somma delle singole masse perchè il quadrato di una somma non è la somma dei quadrati!

[1]Teorema: Il lavoro compiuto da una forza su di un sistema meccanico varia la sua energia cinetica: $L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = \Delta K$, K è l'energia cinetica.

Nella vita di tutti i giorni siamo abituati infatti al fatto che la massa totale di n particelle sia semplicemente la somma delle singole masse. Ora il concetto di massa nella teoria della relatività diverge profondamente da quello nella meccanica classica, vediamo di ricapitolare. Sommario: nei testi di fisica si può sentir parlare di

1. *massa gravitazionale* è la sorgente di forza gravitazionale $F_G = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$;

2. *massa inerziale* è sorgente di forza d'inerzia (ossia di opposizione al cambiamento di stato di moto): $F = ma$;

3. *massa relativistica* corrisponde all'energia a riposo del sistema in esame: $E_o = mc^2$;

4. *massa relativistica trasversale*: γm;

5. *massa relativistica longitudinale*: $\gamma^3 m$.

Si dimostra con semplici ragionamenti che l'energia a riposo non corrisponde nè alla massa gravitazionale nè alla massa inerziale. Neppure è lecito dire che la massa si trasforma in energia (atomica) oppure che l'energia si trasforma in massa. Qui teniamo chiaramente in mente che in Fisica (relativistica, quantistica, classica) il principio fondamentale è quello di conservazione dell'energia e l'energia non si trasforma in nient'altro che energia. Come esempio prendiamo l'ossidazione del carbonio (un bel falò):

$$C + O_2 \longrightarrow CO_2 + \text{ fotoni } (luce - calore)$$

in questa reazione esotermica la somma delle masse di un atomo di carbonio ed una molecola di ossigeno è *superiore* a quella di una molecola di biossido di carbonio. Il motivo è semplice a causa del principio di conservazione dell'energia, l'energia a riposo dei reagenti si è trasferita nell'energia a riposo del diossido di carbonio più la sua energia cinetica più l'energia irradiata.

0.3 Evoluzione del concetto di massa

Il concetto classico di massa, distinto dal concetto di peso, si deve alle riflessioni di Galilei e Newton nel $XVII^o sec.$. Newton lo da come prima definizione nei suoi *Principia Mathematica et Philosophiæ naturalis*:

Definizione 1 (massa=quantità di materia). *La quantità di materia è proporzionale al volume ed alla densità.*

Dunque l'idea di massa è sia estensiva (volume) che intensiva (densità). Inoltre la seconda definizione è

Definizione 2 (momento=quantità di moto). *La quantità di moto è data dal prodotto tra la massa e la velocità.*

Sembra che questa definizione sia derivata dalla prima ma si potrebbe benissimo invertire il processo causale nel senso che definiamo **inerzia** di un corpo la sua quantità di moto ed è chiaro che aumenta all'aumentare della velocità (a parità di massa); mentre la massa deriva da questa definizione quando la velocità si annulla, perciò necessariamente, l'inerzia come quantità di moto deve essere una somma di una quantità invariante (non dipendente dalla velocità) e una quantità linearmente dipendente dalla velocità: $Inerzia = m + kv$. Le proprietà della massa storicamente emerse sono date dai due seguenti fatti: (a) la massa riassume in un dato corpo tutte le proprietà dell'inerzia ovvero la tendenza a mantenere lo stato di moto; (b) la massa è la sorgente della forza di gravitazione universale, ossia la semplice presenza di due masse ad una certa distanza determina una forza di attrazione gravitazionale tra di loro. In questo periodo Newton e Leibniz non usavano la parola energia (cinetica) bensì usavano il termine *forza viva* (vis viva). Nel 1773 fu Lavoisier ad introdurre nella nascente chimica il *principio di conservazione della massa*, mentre T.Young nel 1807 introdusse il termine energia e a metà del $XIX^o sec.$ Meyer e Joule introdussero il *principio conservazione dell'energia* esteso anche ai fenomeni termici (I^o principio della Termodinamica). Nella prima parte del $XX^o sec.$ venne introdotta una profonda modifica alle teorie fisiche ossia il limite alla velocità di interazione (che prima si dava per scontato fosse infinita, immediata). Artefici di quest'idea rivoluzionaria furono principalmente Lorentz, Poincaré, Einstein, Minkowski nel tentativo di conciliare la Meccanica con l'Elettromagnetismo; ogn'uno di loro dedusse delle conseguenze affini ma, concettualmente, diversificate. Fu Einstein che seppe intuire la profonda e generale connessione tra il concetto di massa e quello di energia:

Definizione 3 (massa). *La massa di un corpo o di un sistema qualunque è data dalla sua energia a riposo. Più tecnicamente è definita in termini del quadrivettore energia - impulso*

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}$$

Dunque massa ed energia a riposo sono sinonimi in relatività secondo la famosa equazione

$$E_o = mc^2$$

ma cosa comporta questo assunto nella rielaborazione dei concetti precedenti? La massa in questo caso non è più una quantità additiva. Poi non è più una misura di inerzia o di gravitazione per il semplice fatto che è l'energia totale (energia - impulso) che determina queste cose. Ad esempio un fotone privo di massa è comunque attratto dal Sole per il semplice fatto che possiede una energia (cinetica). Bisogna stare molto attenti, la massa è uno scalare invariante per trasformazioni di Lorentz e soprattutto la massa non dipende dalla velocità (come affermato in certi libri). La massa è la massa o energia a riposo, punto! La massa newtoniana, la massa gravitazionale, la massa inerziale, la massa a riposo, la massa relativistica, sono sinonimi perchè in Fisica non ci devono essere definizioni ambigue. L'idea che la massa dell'elettrone cresca con la velocità è un'idea prerelativistica introdotta da J.J.Thomson, mentre l'idea che la luce abbia massa $m = E/c^2$ è un'idea del matematico H.Poincarè. La massa è dunque una forma d'energia e precisamente quella a riposo; l'energia, sottoforma di massa può variare secondo la formula ricavata da Einstein

$$\Delta E_o = \Delta mc^2$$

Principio 1 (conservazione dell'energia). *In ogni caso fisico l'energia si conserva sia localmente che globalmente.*

Questo principio assicura che l'energia è la grandezza fondamentale che pur trasformando le sue caratteristiche da cinetica, potenziale, termica, di riposo, etc., mantiene sempre la quantità iniziale, tenuto conto di tutti i contributi.
La massa non è gravitazionale, non è inerziale ma è energia a riposo. Il principio d'inerzia relativizzato. È chiaro che in questo ragionamento si introduce un paradosso: come può un'energia essere a riposo? Rispondere a questa domanda richiede una rielaborazione (l'ennesima) dei fondamenti della teoria atomica della materia. Tutto sommato la realtà che ci fornisce il mondo è una costruzione mentale (sensibile - percepibile). La geometria è una scienza fisica. Non ci resta che pensare che la massa sia movimento vorticoso ossia un movimento che è fermo. Questa è un'idea che risale a Kaluza ossia l'idea delle dimensioni arrotolate o, come ci si esprime oggi nella teoria delle stringhe, compattificate. Un esempio grossolano ma che rende l'idea è quella di un motore che pur essendo sempre in moto (internamente) può essere fermo (esternamente), questo a causa dei meccanismi di trasmissione che decidono se, come, quando esternare il movimento interno.

0.4 Dinamica

Il quadrivettore $\vec{P}$ quantità di moto (quadrimpulso) è definito, similmente alla meccanica newtoniana, come:

$\vec{P} = m\vec{U}$ dove m è la massa del corpo. La quantità di moto nel sistema di riferimento dell'osservatore diventa quindi:

$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ A causa del coefficiente γ la quantità di moto di un corpo tende a infinito quando v tende alla velocità della luce c. Analogamente, introducendo la quadriforza $\vec{K}$ il secondo principio si esprime come

$\vec{K} = m\vec{a}$ oppure, ponendo $\vec{F} = \dfrac{\vec{K}}{\gamma}$ chiamata forza relativa (al sistema galileiano considerato):

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ Facciamo l'esempio di una particella sottoposta a una forza costante, come un elettrone sottoposto a un campo elettrico costante. Secondo il senso comune e il secondo principio della dinamica continuando a fornirgli energia esso dovrebbe aumentare linearmente la sua velocità. Nella realtà però, per quanta energia continuiamo a dare, una particella dotata di massa non riuscirà mai a raggiungere la velocità della luce e l'accelerazione risultante sarà sempre minore. Ciò è ben spiegato dalla dinamica relativistica: chiamando "massa relativistica" il termine γm si desume che la massa inerziale dell'elettrone aumenta con l'aumentare della velocità. A velocità prossime a quelle della luce la massa relativistica tende all'infinito. L'aumento della massa relativistica non corrisponde ad un aumento della massa che si mantiene invariante bensì corrisponde ad un aumento d'inerzia che avviene a spese dell'energia fornita e la velocità della luce non può essere raggiunta poiché occorrerebbe un'energia infinita.

0.5 Idea di Antonio Maria Ferro

Antonio introduce il *principio di spostamento d'inerzia* in base al cambiamento di velocità. Per inerzia intendiamo la quantità (relativa): $In = m\gamma(v)$, con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, fattore relativistico.

Definizione 4. *Chiamasi spostamento di massa la quantità*

$$sp = \frac{dIn}{dt}$$

Un qualunque corpo in movimento relativo varia la sua inerzia con la velocità. Vediamo come:

$$\frac{dIn}{dt} = m\frac{d\gamma}{dt} = \frac{mv}{c^2\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}\frac{dv}{dt} = \gamma^3\frac{mv}{c^2}\frac{dv}{dt} = \gamma^3\frac{m}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$$

Il teorema dell'impulso afferma che: *l'mpulso, che una forza applicata su un corpo imprime, è pari alla variazione di quantità di moto del corpo.*

$$Fdt = dp = d(m\gamma v) = d(Inv) = vd(In) + Indv = \gamma^3\frac{mv^2}{c^2}dv + m\gamma dv$$

Ora Antonio introduce il tempo di variazione d'inerzia:

$$dt = \frac{dIn}{sp}$$

che in forma integrale diventa

$$T = \int_{t_o}^{t_1} dt = \int_{v_o}^{v_1} \frac{mv}{c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}} \frac{dv}{sp}$$

Da quanto visto finora si deduce una serie di risultati: 1. lo spostamento di massa avviene in presenza di accelerazione. Se l'accelerazione è costante in modulo si presentano due casi notevoli: 1. accelerazione centripeta: $a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$; oppure 2. moto uniformemente accelerato: $a = cost$.

Moto circolare uniforme

Nel caso centripeto, si genera un vortice circolare che genera un incremento di massa che produce una irradiazione isotropa che diminuisce la sua intensità come l'inverso del quadrato della distanza, come l'intensità luminosa, la forza gravitazionale, la forza elettrica. In questo caso la velocità periferica dell'inerzia è $v = \omega r$ e l'accelerazione centripeta è $a_c = \omega^2 r$ per cui abbiamo

$$sp = \frac{m\omega r}{c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^3}} \omega^2 r$$

La quantità $\omega / c = k$ ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, $1/metro$, per cui introduciamo lo scalare $u = kr$. Quindi abbiamo

$$sp = \frac{m\omega k^2 r^2}{\sqrt{(1 - k^2 r^2)^3}} = \frac{m\omega u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^3}}$$

A questo punto sarebbe interessante ipotizzare che la massa delle particelle elementari è dovuta ad un vortice di raggio R e velocità angolare ω

$$m_p = \frac{\omega^2 R h}{c}$$

La massa a riposo di un elettrone è di approssimativamente $m_e = 9,109 \times 10^{-31} kg$. Il valore sperimentale della costante è $h = 6.62606957(29) \times 10^{-34} J \cdot s$. La velocità della luce $c = 299792458 m/s$. Il raggio di

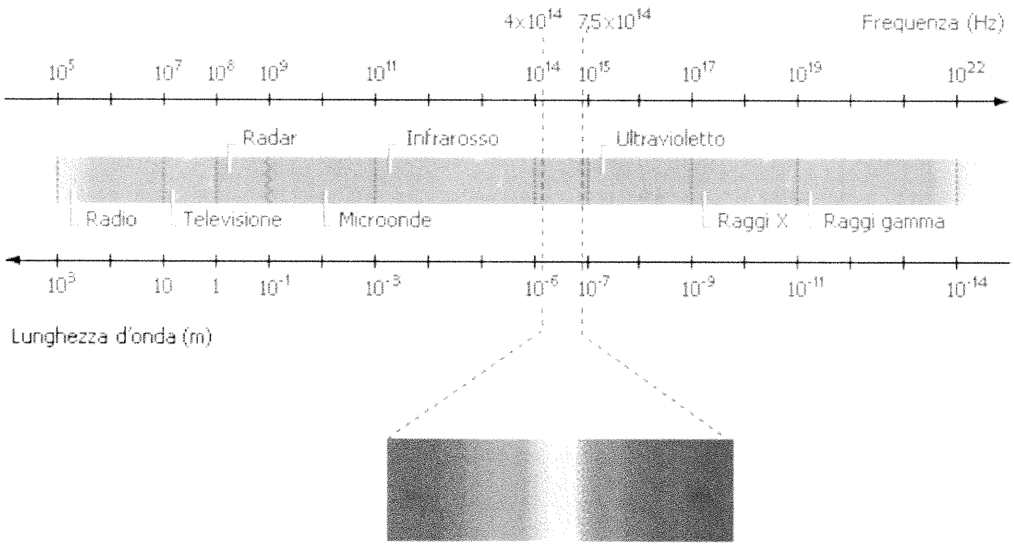

Figura 1: Spettro elettromagnetico.

Bohr vale $R = 5,292 \times 10^{11} m$. Calcoliamo la frequenza della massa dell'elettrone

$$f_e = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{cm_e}{Rh}} = 1.40452 \times 10^{10} Hz$$

che corrisponde ad una lunghezza d'onda

$$\lambda_e = 2,13448 \times 10^{-2} m$$

che cade nell'ambito delle microonde.

Moto uniformemente accelerato

Sappiamo che nel caso classico le formule del moto uniformemente accelerato (m.u.a.) sono date da

$$\begin{cases} a = costante \\ v(t) = at + (v_o) \\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 + (v_o t + x_o) \end{cases}$$

E quindi, aspettando un congruo tempo, la velocità della luce viene certamente superata. Nella cinematica relativistica il m.u.a. è definito quando $a_i = \dfrac{du_i}{d\tau} = cost.$ cioè quando la forza rimane costantemente uguale nel sistema in cui il corpo è (istantaneamente) in quiete.

Limitiamoci al moto rettilineo lungo l'asse x.

$$\int_0^t \frac{dp_i}{dt}\frac{dt}{d\tau}dt = \int_0^t f_i\gamma dt$$

Poniamo le condizioni iniziali a $t = 0$, $x = v = 0$, per cui

$$\int_0^t dp_x = f_x t$$

ossia $m\gamma v = ft$. Risolviamo rispetto v otteniamo

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}$$

Ne consegue che c diventa la velocità limite superiore. Integrando di nuovo

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \frac{atdt}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right)$$

che perfeziona quella classica. Dunque le formule del m.u.a. relativistico si riassumono in

$$\begin{cases} a = costante \\ v(t) = v(t) = \dfrac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} \\ x(t) = \dfrac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \dfrac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right) \end{cases}$$

Possiamo riscrivere la formula finale come

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 - (ct)^2 = \left(\frac{c^2}{a}\right)^2$$

Normalmente lo spazio viene misurato in *secondi - luce*, ovvero ct,con questa unità di misura la velocità della luce è 1. La linea

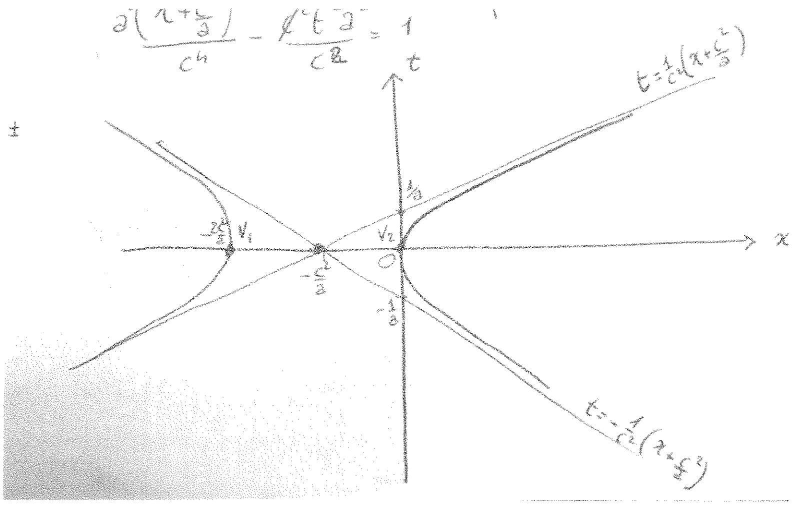

Figura 2: Diagramma orario del moto iperbolico.

oraria del moto èdunque un'iperbole equilatera con centro nel punto $(-c^2/a, 0)$, della quale interessa solo il ramo evidenziato. Il moto uniformemente accelerato relativistico è dunque *iperbolico* e non *parabolico*. Dunque

$$\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - t^2 = \frac{1}{a^2}$$

Calcolando $T = m\dfrac{\Delta\gamma}{sp}$ e sostituendo, otteniamo

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{a^2\left(m\dfrac{\Delta\gamma}{sp}\right)^2}{c^2}} - 1\right)$$

È interessante notare che la forza centripeta non compie lavoro per definizione essendo sempre ortogonale alla velocità, la forza tangenziale compie un lavoro che cala all'aumentare della velocità che produce un aumento d'inerzia, quindi un calo dell'accelerazione. Alla luce della formula fondamentale

$$E = m\gamma c^2 = mc^2 + K$$

dove il primo addendo è dato dall'energia dovuta alla massa e K è l'energia cinetica, abbiamo il teorema di conservazione che afferma

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dm}{dt}c^2 + \frac{dK}{dt} = 0$$

Qui la massa è suscettibile di variazione nel senso che vi è qualche evento che la accresce (assorbimento di luce, reazione nucleare dissociativa) o qualche evento che la decresce (emissione di luce, reazione nucleare associativa). Non saprei però come usare queste osservazioni ai fini pratici.